Теорема 8. Максимум функции $O_{l,k,n}$ при $l<k\leqslant q$ на части положительного октанта R^{q+1}, выделенной условием $p_0>0$, достигается на множестве $p_0>0$, $p_l=\ldots=p_q=0$.

Доказательство. Шаг 1. Отношения $M(l, j)/M(k, j)$ с ростом j от 0 до q монотонно убывают. Действительно, отношения C_m^l/C_m^k с увеличением m от k до q монотонно убывают. (утверждение 1, пункт 1). Следовательно, при $j\geqslant k$ $M(l, j)/M(k, j)\leqslant C_j^l/C_j^k$. При уменьшении j на один к числителю добавится C_{j-1}^l, а к знаменателю C_{j-1}^k, отношение которых больше, чем $C_j^l/C_j^k\geqslant M(l, j)/M(k, j)$. Поэтому, при $j>k$ при уменьшении j отношение $M(l, j)/M(k, j)$ будет увеличиваться. При дальнейшем уменьшении j до l оно будет продолжать увеличиваться — будет лишь расти знаменатель.

Шаг 2. Для завершения доказательства нужно воспользоваться результатом шага 1 и следствием 2.

Переходим к третьей задаче дробнолинейного программирования. Эта задача похожа на вторую, и мы воспользуемся уже введенными обозначениями. Кроме, того для $0<k\leqslant q$ и $0\leqslant j\leqslant q$ положим $N(k, j)=$ $=\sum\limits_{j\leqslant i\leqslant n-j} C_i^k=C_{n+1-j}^{k+1}-C_{j+1}^{k+1}$ (при $k>j$ вычитаемое суть 0). Рассмотрим на R^{q+1} функцию

$$D_{k,n}=\sum_{0\leqslant j\leqslant q} p_jN(k, j) \Big/ \sum_{0\leqslant j\leqslant q} p_jM(k, j).$$

Теорема 9. Максимум функции $D_{k,n}$ на части положительного октанта в R^{q+1}, выделенной условием $p_0>0$, достигается на множестве, $p_0>0$, $p_1=\ldots p_q=0$.

Доказательство. Шаг 1. Отношение $N(k, j)/M(k, j)$ с уменьшением j от q до k монотонно возрастает. Действительно, при переходе от $j+1$ к j к числителю прибавляется величина $C_{n-j}^k+C_j^k$, а к знаменателю — величина $2C_j^k$. Отношение этих величин равно $\frac{1}{2}(1+C_{n-j}^k/C_j^k)$. Эти отношения растут с уменьшением j. Каждое из них больше, чем $N(k, q)/M(k, q)$. Отсюда и вытекает шаг 1.

Шаг 2. Отношение $N(k, j)/M(k, j)$ с уменьшением j от k до 0 монотонно возрастает — растет лишь числитель. Для завершения доказательства нужно соединить этот факт с результатом следствия 2 и шага 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хованский А. Г.* Линейное программирование и обобщение теоремы Никулина. — Настоящий сборник
2. *Stanley R.* The number of faces of a simplicial convexes. — Advances in Math. 35, 236—238 (1980)

А. Г. Хованский

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ НИКУЛИНА

Эта статья является непосредственным продолжением предыдущей и использует введенные в ней определения и обозначения. В статье оценивается доля k-мерных граней простого многогранника, которые пересекаются с его гиперплоским сечением. Оценка применяется для обобщения теоремы Никулина о средней сложности граней многомерного простого многогранника. Это обобщение дает решение старой задачи из геометрии Лобачевского. Приводятся некоторые результаты о гиперплоских сечениях непростых выпуклых многогранников.

§ 1. Оценка доли k-мерных граней, пересеченных гиперплоскостью

Теорема 1. Для непроходящего через вершины гиперплоского сечения простого n-мерного многогранника отношение числа непересеченных l-мерных граней к числу непересеченных k-мерных граней при $0 \leqslant l < k \leqslant q = [n/2]$ не превосходит отношения

$$\Big(\sum_{i \leqslant q} C_i^l H_i + \sum_{q < i \leqslant n} C_{n-i}^l H_{n-i}\Big) : \Big(\sum_{i \leqslant q} C_i^k H_i + \sum_{q < i \leqslant n} C_{n-i}^k H_{n-i}\Big),$$

в котором H_i — коэффициенты H-полинома многогранника. Для удачных рассечений (см. § 2 в [1]) предъявленная оценка точна.

Доказательство. Теорема 4 из § 2 в [1] дает возможность вычислить отношение числа непересеченных l-мерных граней к числу непересеченных k-мерных. Это вычисление проводится в терминах множеств $0(c)$ и $\Pi(c)$ вершин многогранника, лежащих соответственно ниже и выше секущей гиперплоскости $L = c$. Именно, отношение равно

$$\Big(\sum_{b \in 0(c)} C_{i(b)}^l + \sum_{b \in \Pi(c)} C_{n-i(b)}^l\Big) : \Big(\sum_{b \in 0(c)} C_{i(b)}^k + \sum_{b \in \Pi(c)} C_{n-i(b)}^k\Big).$$

Из теоремы 7 § 3 видно, что выписанное отношение максимально, если при $i(b) < q = [n/2]$ точка b лежит в множестве $0(c)$ и при $i(b) > q$ точка b лежит в множестве $\Pi(c)$. Отношение для этого случая и фигурирует в теореме 1. Экстремальное отношение достигается для удачных рассечений многогранника.

Для доказательства двух следующих теорем мы воспользуемся утверждением о возрастании к центру коэффициентов H-полинома простого многогранника (см. § 1 в [1] и [2]). Определим P-полином простого n-мерного многогранника следующей формулой:

$$P(t) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q} P_i t^i,$$

где $q = [n/2]$; $P_0 = H_0 = 1$; $P_i = H_i - H_{i-1}$ при $i > 0$. В этой формуле H_i — i-й коэффициент H-полинома простого многогранника. Неубывание к центру коэффициентов H-полинома эквивалентно неотрицательности коэффициентов P-полинома. По коэффициентам P-полинома восстанавливается H-полиномом:

$$H(t) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant [n/2]} P_j (t^j + \ldots + t^{n-j}).$$

Теорема 2. Для непроходящего через вершины гиперплоского сечения n-мерного простого многогранника отношение числа непересеченных l-мерных граней к числу непересеченных k-мерных граней при $0 \leqslant l < k \leqslant q = [n/2]$ не превосходит числа $\left(C_{[(n+1)/2]}^{l+1} + C_{[(n+2/2)]}^{l+1}\right) / \left(C_{[(n+1)/2]}^{k+1} + C_{[(n+2)/2]}^{k+1}\right)$. Оценка точная и достигается при удачном рассечении n-мерного симплекса (т. е. при рассечении симплекса, при котором по одну сторону от гиперплоского сечения лежит ровно q его вершин).

Доказательство. Перепишем оценку из теоремы 1 в терминах коэффициентов P-полинома. Получим, что искомое отношение не превосходит числа

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant [n/2]} P_j \Big(\sum_{j \leqslant i \leqslant [n/2]} C_i^l + \sum_{[n/2] < i \leqslant n-j} C_{n-i}^l\Big):$$

$$: \sum_{0<j<[n/2]} P_j\Big(\sum_{j<i<[n/2]} C_i^k + \sum_{[n/2]<i<n-j} C_{n-i}^k\Big) =$$

$$= \sum_{0<j<[n/2]} P_j M(l, j) \Big/ \sum_{0<j<[n/2]} P_j M(k, j).$$

Согласно теореме 8 из § 3 в [1] это отношение максимально при $p_0=1$, $P_l=\ldots=P_q=0$ и равно $M(l, 0)/M(k, 0)$. Случай симплекса легко рассмотреть непосредственно и убедиться, что экстремально его удачное рассечение. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для не проходящего через вершины гиперплоского сечения n-мерного простого многогранника отношение числа k-мерных граней к числу непересеченных k-мерных граней при $k\leqslant q=[n/2]$ не превосходит числа $(C^{k+1}_{[(n+1)/2]}+C^{k+1}_{[(n+2)/2]})/C^{k+1}_{n+1}$. Оценка точная и достигается в единственном случае — при удачном рассечении n-мерного симплекса.

Доказательство. Число непересеченных k-мерных граней не меньше, чем $\sum\limits_{j<[n/2]} P_j\Big(\sum\limits_{j<i<q} C_i^k + \sum\limits_{q<i<n-j} C_{n-i}^k\Big)$. Это оценка из теоремы 5 в [1], переписанная в терминах P-полинома. Число k-мерных граней в терминах P-полинома равно $\sum\limits_{j<[n/2]} P_j \sum\limits_{j<i<n-j} C_i^k$. Согласно теореме 9 в [1] отношение второго из этих чисел к первому максимально при $P_1=\ldots$ $\ldots=P_{[n/2]}=0$, что соответствует случаю симплекса. Теорема доказана.

§ 2. Среднее число l-мерных граней на k-мерной грани многомерного многогранника

Число всевозможных пар $\Gamma_l\subset\Gamma_k$, состоящих из l-мерной грани Γ_l и содержащей ее k-мерной грани Γ_k многогранника Δ обозначим через $F_{l,k}(\Delta)$. Число $F_{l,k}(\Delta)$ можно интерпретировать как суммарное число l-мерных граней у k-мерных граней многогранника. Средним числом l-мерных граней на k-мерной грани многогранника Δ называется отношение числа $F_{l,k}(\Delta)$ к числу $F_k(\Delta)$ всех k-мерных граней многогранника Δ. На сколько большим может быть отношение $F_{l,k}(\Delta)/F_k(\Delta)$ для n-мерных многогранников? Покажем, как редуцировать этот вопрос к задаче меньшего числа измерений. Сначала еще несколько обозначений и определений. Пусть Δ — выпуклый n-мерный многогранник и $L=c$ — гиперплоскость не параллельная ни одному ребру многогранника. С каждой вершиной b многогранника Δ связан $(n-1)$-мерный многогранник $\Delta(b)$, рассеченный гиперплоскостью $L(b)$. Именно: около вершины b многогранник Δ представляет собой n-мерный выпуклый конус. Рассечем этот конус гиперплоскостью, проходящей через вершину и параллельной гиперплоскости $L=c$. Компактное сечение рассеченного конуса и свяжем с вершиной b. (Это компактное сечение $\Delta(b)$ с гиперплоскостью $L(b)$ определено с точностью до проективного преобразования). Множество пар $\{\Delta(b), L(b)\}$ для всех вершин b назовем множество рассеченных $(n-1)$-мерных многогранников ассоциированным с многогранником Δ и гиперплоскостью $L=c$.

Для каждого многогранника $\Delta(b)$, рассеченного гиперплоскостью $L(b)$, не проходящей через его вершины, определим ряд чисел: $F_{l,k}(\Delta(b), L(b))$ — число всех пар $\Gamma_l\subset\Gamma_k$, состоящих из l-мерной грани, Γ_l, не пересеченной гиперплоскостью $L(b)$ и любой содержащей ее k-мерной грани Γ_k; $F_k(\Delta(b), L(b))$ — число всех k-мерных граней, не пересеченных гиперплоскостью $L(b)$; $F_{l,k}(\Delta(b), L(b))/F_l(\Delta(b), L(b))$ — среднее число непересеченных l-мерных граней на k-мерной грани; $F_k(\Delta(b))/F_k(\Delta(b), L(b))$ — среднее число k-мерных граней, приходящихся на непересеченную k-мерную грань (последнее число определено, лишь если $F_k(\Delta(b), L(b))>0$. Это всегда так, если $k\leqslant n/2$ (см. § 3).

Итак, пусть Δ-выпуклый n-мерный многогранник, $L=c$ — гиперплоскость, не параллельная его ребрам, и $\{\Delta(b), L(b)\}$ — ассоциированный набор рассеченных $(n-1)$-мерных многогранников.

Теорема 4 (о редукции). 1. Для $k\leqslant(n+1)/2$ среднее число вершин на k-мерной грани многогранника Δ не превосходит максимума по набору $\{\Delta(b), L(b)\}$ из средних чисел $(k-1)$-мерных граней, приходящихся на непересеченную $(k-1)$-мерную грань. 2. Для $0\leqslant l<k\leqslant(n+1)/2$, среднее число l-мерных граней на k-мерной грани многогранника Δ не превосходит максимума по набору $\{\Delta(b), L(b)\}$ из средних чисел, не пересеченных $(l-1)$-мерных граней на $(k-1)$-мерной грани.

Доказательство. И числитель и знаменатель дроби $F_{l,k}(\Delta)/F_k(\Delta)$ представим в виде суммы неотрицательных чисел по множеству вершин B многогранника Δ. Для этого сопоставим паре $\Gamma_l\subset\Gamma_k$ две вершины на грани Γ_l — вершину, в которой линейная функция L, ограниченная на Γ_l, достигает максимума, и вершину, в которой она достигает минимума. Эти две вершины совпадают, если и только если $l=0$, (и грань Γ_l является вершиной). При $l>0$ представим число $2F_{l,k}(\Delta)$ (а при $l=0$ число $F_{0,k}(\Delta)$) в виде суммы по вершинам многогранника Δ числа пар $\Gamma_l\subset\Gamma_k$, для которых в этой вершине достигается либо максимум, либо минимум функции L на грани Γ_l. Рассмотрим слагаемое этой суммы, соответствующее фиксированной вершине b. При $l>0$ это слагаемое в точности равно $F_{(l-1),(k-1)}(\Delta(b), L(b))$ — суммарному числу $(l-1)$-мерных граней, не пересеченных гиперплоскостью $L(b)$ на $(k-1)$-мерных гранях в многограннике $\Delta(b)$. При $l=0$ это слагаемое равно $F_{(k-1)}(\Delta(b))$-числу $(k-1)$-мерных граней многогранника $\Delta(b)$.

Итак,

$$F_{0,k}(\Delta)/F_k(\Delta)=\sum_B F_{0,(k-1)}(\Delta(b), L(b))/2\sum_B F_{(k-1)}(\Delta(b)).$$

Далее,

$$F_{l,k}(\Delta)/F_k(\Delta)=2\sum_B F_{(l-1),(k-1)}(\Delta(b), L(b))/2\sum_B F_{(k-1)}(\Delta(b), L(b))=$$

$$=\Big(\sum_B F_{(l-1),(k-1)}(\Delta(b), L(b))\Big/\sum_B F_{(k-1)}(\Delta(b))\Big)\times$$

$$\times\Big(\sum_B F_{(k-1)}(\Delta(b))\Big/\sum_B F_{(k-1)}(\Delta(b), L(b))\Big).$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться следствием 2 из § 3 в [1].

Покажем, что из теоремы о редукции выводится теорема Никулина.

Теорема 5 (теорема Никулина). Пусть Δ — произвольный простой n-мерный многогранник. Тогда среднее число l-мерных граней на k-мерной грани при $k\leqslant[(n+1)/2]$ не превосходит числа

$$C_{n-l}^{n-k}(C_{[n/2]}^l+C_{[(n+1)/2]}^l)/(C_{[n/2]}^k+C_{[(n+1)/2]}^k).$$

Доказательство. Для простого многогранника все многогранники $\Delta(b)$ — $(n-1)$-мерные симплексы. Поэтому теорема о редукции сводит теорему Никулина к несложной задаче о симплексе, которая легко решается непосредственно.

Выпуклый n-мерный многогранник называется простым в ребрах, если каждое его ребро содержится ровно в $(n-1)$ грани старшей размерности.

Теорема 6 (обобщенная теорема Никулина). Оценка из теоремы Никулина справедлива для многогранников, простых в ребрах.

Доказательство. Для каждой вершины b многогранник $\Delta(b)$ прост — это вытекает из простоты в ребрах исходного многогранника Δ. Согласно редукционной теореме достаточно для простых многогранников $\Delta(b)$ оценить отношение нерассеченных $(l-1)$-мерных граней к нерассеченным $(k-1)$-мерным (каждая $(l-1)$-мерная грань лежит ровно в C_{n-1}^{h-k} $(k-1)$-мерных гранях) и отношение $(k-1)$-мерных граней к нерассеченным $(k-1)$-мерным. Первая оценка дается теоремой 2, а вторая — теоремой 3.

§ 3. Приложение к геометрии Лобачевского

Теорема 6 из § 2 является решением задачи Никулина, поставленной им в связи с геометрией Лобачевского. (Именно работа над этой задачей и привела ко всем результатам настоящей статьи и статьи [1].) Несколько слов о соответствующей задаче в геометрии Лобачевского.

Рассмотрим фундаментальный многогранник группы, порожденной отражениями в пространстве Лобачевского. Хорошо известно, что если такой многогранник имеет конечный объем, то он прост в ребрах. (Более того, такой многогранник почти прост, т. е. около каждой вершины является конусом над произведением симплексов.) Скажем, что для n-мерного многогранника справедлива оценка Никулина до размерности m, если выполняется оценка из теоремы 5 для любых l, k таких, что $0 \leqslant l,\ k \leqslant m$. Существенно используя идеи В. В. Никулина и Э. Б. Винберга, М. Н. Прохоров доказал следующую теорему.

Теорема Прохорова. В пространстве Лобачевского размерности >995 не существует дискретных групп, порожденных отражениями, с фундаментальным многогранником конечного объема, для которого справедлива оценка Никулина до размерности 4.

Теорема Прохорова была доказана примерно год назад. (Прохорову удалось также доказать, что любой почти простой многогранник удовлетворяет оценке Никулина до размерности 3, однако его метод доказательства не переносится на большие размерности). Следствием теоремы Прохорова и теоремы 6 является следующая теорема (полученная, таким образом, в результате совместных усилий Прохорова и автора).

Теорема 7. Не существует дискретных групп, порожденных отражениями с фундаментальным многогранником конечного объема, в пространстве Лобачевского размерности >995.

§ 4. Случай произвольных многогранников

Общую линейную функцию, т. е. функцию, не постоянную ни на каком ребре многогранника, можно рассматривать и для непростых многогранников. Скажем, что функция L имеет в вершине b верхний индекс, равный k, если существует k-мерная грань, на которой максимум линейной функции достигается в вершине b и не существует грани размерности $>k$, обладающей подобным свойством.

Пусть функция L имеет в вершине b верхний индекс, равный k и Γ_k — некоторая k-мерная грань, максимум функции L на которой достигается в точке b. Рассмотрим все $(k+1)$-мерные грани, содержащие Γ_k, и выберем из них ту грань $\Gamma_{(k+1)}$, на которой максимум функции L минимален. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8 (о минимаксе). В точке максимума ограничения функции L на грань $\Gamma_{(k+1)}$ верхний индекс функции L равен $k+1$.

Доказательство. Обозначим точку максимума функции L на $\Gamma_{(k+1)}$

через b_0. Ясно, что верхний индекс функции L в этой точке $\geqslant(k+1)$. Если индекс больше, чем $(k+1)$, то существует $(k+2)$-мерная грань $\Gamma_{(k+2)}$ с максимумом в этой же точке b_0. Итак, в $(k+2)$-мерном многограннике $\Gamma_{(k+2)}$ максимум достигается в вершине b_0. Только одна грань старшей размерности в этом многограннике содержит и вершину b_0, и грань Γ_k — этой гранью является грань $\Gamma_{(k+1)}$. Другая $(k+1)$-мерная грань в $\Gamma_{(k+2)}$, содержащая грань Γ_k (всего таких грани две) не может содержать вершину b_0 и, следовательно, максимум функции L на этой грани меньше. Противоречие доказывает теорему.

Следствие. Существуют вершины всех верхних индексов от нуля до n. Более того, существует последовательность вершин, на которой индекс возрастает от 0 до n, а функция L монотонно возрастает.

Доказательство. В точке минимума функция имеет нулевой верхний индекс. Начиная с этой вершины и последовательно пользуясь теоремой, получим требуемый результат.

Следствие. Для простого n-мерного многогранника числа H_i при $i=0, \ldots, n$ строго положительны.

Теорема 9 (о суммарном индексе). Для каждой вершины n-мерного многогранника сумма верхнего индекса функций L и верхнего индекса функции $(-L)$ не меньше, чем n.

Теорема 10 (о рассечении). Для непроходящего через вершины гиперплоского сечения выпуклого n-мерного многогранника существуют две грани, лежащие по разные стороны от гиперплоского сечения, (и не переченные этой гиперплоскостью) суммарной размерности $\geqslant(n-1)$.

Теоремы 9 и 10 будем доказывать одновременно.

Шаг 1. Из справедливости теоремы 10 для некоторой размерности $(n-1)$ вытекает справедливость теоремы 9 для размерности n. Действительно, с вершиной b связан $(n-1)$-мерный многогранник $\Delta(b)$, конус над которым совпадает с конусом вершины b, и $(n-2)$-мерное сечение этого многогранника поверхностью уровня функции L. Конусы над максимальными непересеченными гранями этого многогранника, лежащими по разные стороны от сечения, соответствуют граням исходного многогранника, для которых функции L и функция $(-L)$ достигают максимума или минимума в точке b. Сумма их размерностей на два превосходит размерности максимальных граней. Шаг 1 сделан, так как $(n-1)-1+2=n$.

Шаг 2. Из справедливости теоремы 9 для некоторой размерности n вытекает справедливость теоремы 10 для размерности n.

Действительно, пусть сечение многогранника задается поверхностью уровня $L=c$ линейной функции L. Можно считать, что функция L не постоянна ни на каком ребре (в противном случае достаточно чуть изменить ее коэффициенты). Из следствия к теореме о минимаксе вытекает существование вершин b_1 и b_2, таких что: 1) верхний индекс в вершине b_2 на единицу больше верхнего индекса в вершине b_1; 2) $L(b_1)<c$ и $L(b_2)>c$. Пусть индекс функции L в вершине b_1 равен m. Тогда существует m-мерная грань, на которой линейная функция строго меньше, чем c. В вершине b_2 индекс равен $(m+1)$, и по теореме 9 индекс функции $(-L)$ в этой вершине не меньше, чем $n-m-1$. Поэтому существует $(n-m-1)$-мерная грань, на которой функция L строго больше, чем c. Шаг 2 сделан, так как $m+n-m-1=n-1$.

Шаг 3. Теоремы 9 и 10 верны для любого $n>0$. Действительно, для $n=1$ обе теоремы очевидно верны. Сделав сначала шаг 1, а затем шаг 2, перейдем к следующему n и т. д.

Рассмотрим теперь один пример непростого многогранника. Пусть пространство R^n разложено в прямую сумму трех пространств $R^n=R^k+R^l+R^1$, последнее из которых одномерно. Пусть соответственно координаты в R^n суть (x, y, t), где $x=x_1, \ldots, x_k$; $y=y_1, \ldots, y_l$; $t=t_1$, причем на R^k функции y и t равны 0, на R^l — функции x и t равны 0, на R^1 равны нулю x и y.

Пусть $\Delta_1\subset R^k$ и $\Delta_2\subset R^l$ соответственно k- и l-мерные выпуклые многогранники. Расположим первый из них в пространстве $y=0$, $t=a$, а второй — в пространстве $x=0$, $t=b$ (будем считать, что $b>a$). Определим многогранник Δ как выпуклую оболочку многогранников Δ_1 и Δ_2.

Утверждение. Выпуклая оболочка двух произвольных граней из многогранников Δ_1 и Δ_2 является гранью многогранника Δ.

Доказательство. Пусть на фиксированной грани многогранника $\Delta_1 \subset R^k$ достигает максимума линейная функция $L_1(x)$, причем этот максимум равен A, а на фиксированной грани многогранника $\Delta_2 \subset R^l$ достигает максимума линейная функция $L_2(y)$, причем этот максимум равен B. Рассмотрим на R^n линейную функцию $L=L_1(x)+L_2(y)+$ $+L_3(t)$, где L_3 — линейная функция от t, равная в точке a числу $(-A)$, а в точке b — числу $(-B)$. Тогда функция L достигает максимума (равного нулю) на многограннике Δ в точках выпуклой оболочки рассматриваемых граней.

Утверждение. Существуют гиперплоские сечения n-мерных многогранников, при $n \geqslant 5$ пересекающие как угодно большую долю его ребер.

Действительно. Представим R^5 как $R^2+R^2+R^1$ и применим предыдущую конструкцию для равных многогранников Δ_1 и Δ_2, имеющих по N вершин. Число ребер, соединяющих Δ_1 и Δ_2, равно N^2 Эти ребра рассекаются гиперплоскостью $t=(a+b)/2$. Общее же число ребер равно N^2+2N. При больших N будет пересекаться как угодно большая доля ребер.

Замечание 1. Аналогичный пример можно построить и для 4-мерного многогранника. Аналогичные примеры строятся и для l-мерных граней на k-мерных, для достаточно больших n. Напротив, для 3-мерных многогранников доля пересеченных ребер не превосходит 2/3.

Замечание 2. Мне не известно, справедлив ли аналог теоремы Никулина для произвольных многогранников.

Замечание 3. Для непростых многогранников вряд ли можно гарантировать существование непересеченных граней более сильное, чем в теореме 10. Это достаточно убедительно показывает приведенный пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хованский А. Г.* Линейное программирование и геометрия выпуклых многогранников. — Настоящий сборник.
2. *Stanley R.* The number of faces of a simplicial convexes. Advances of Math. 35, 236—238

Д. А. Блох

ШТРАФЫ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть A_1, A_2 — матрицы порядков $k \times m$ и $k \times n$ соответственно; $\varphi(x_1)$ — строго выпуклая функция, т. е.

$$\varphi(\lambda x_1+(1-\lambda) z_1)<\lambda \varphi(x_1)+(1-\lambda) \varphi(z_1)$$

при $0<\lambda<1$.

Двойственной к задаче

$$\begin{cases} A_1 x_1+A_2 x_2=b, \ x_1, x_2 \geqslant 0; \\ \min (\varphi(x_1)+(c, x_2)), \end{cases} \tag{1}$$

согласно методу построения двойственных задач, предложенному в [1], является следующая задача: